

1.1 Α. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΟΥΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Τα σύνολα των αριθμών

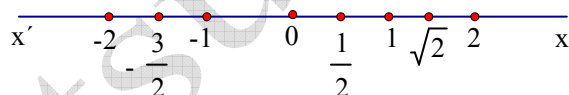
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Το σύνολο των ρητών αριθμών. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \mid \mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{Z} \text{ και } \nu \neq 0 \right\}$
- Το σύνολο των άρρητων αριθμών. Οι μή ρητοί
Οι αριθμοί που δε μπορούν να πάρουν τη μορφή ρητού
Δεν έχουμε ιδιαίτερο συμβολισμό για το σύνολό τους
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R} = \text{ρητοί και άρρητοι}$

Τα παραπάνω σύνολα χωρίς το 0 συμβολίζονται με $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$

2.

Άξονας των πραγματικών αριθμών

Είναι μία ευθεία στα σημεία της οποίας έχουμε τοποθετήσει τους πραγματικούς αριθμούς



Το σημείο στο οποίο είναι το 0 το λέμε αρχή του άξονα

3.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού a

Συμβολίζεται με $|a|$ και ισούται με την απόσταση του σημείου στο οποίο είναι ο αριθμός a από την αρχή του άξονα

4.

Ομόσημοι - ετερόσημοι αριθμοί

- Ομόσημοι αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο
- Ετερόσημοι αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο

5.

Αντίθετοι – αντίστροφοι αριθμοί

- Δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι όταν έχουν άθροισμα 0
- Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι όταν έχουν γινόμενο 1

6.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

- Αντιμεταθετική : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Προσεταιριστική : $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- Ουδέτερο στοιχείο το 0 : $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

7.

Ιδιότητες του πολλα/μού

- Αντιμεταθετική : $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- Προσεταιριστική : $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
- Ουδέτερο στοιχείο το 1 : $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

Η επιμεριστική ιδιότητα : $\alpha(\beta + \gamma) = (\beta + \gamma) \alpha = \alpha\beta + \alpha\gamma$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Αντίθετος του α : Προσοχή το σύμβολο $-\alpha$ δεν παρασtάνει κάποιον αρνητικό αριθμό, αλλά παρισtάνει τον αντίθετο του αριθμού α . Έτσι

Π.χ αν $\alpha = 3$ τότε $-\alpha = -3$,
 αν $\alpha = -5$ τότε $-\alpha = 5$
 αν $\alpha = 0$ τότε $-\alpha = 0$.

2.

Για την απόλυτη τιμή του α : Αν $\alpha > 0$ τότε $|\alpha| = \alpha$

Αν $\alpha < 0$ τότε $|\alpha| = -\alpha$

Αν $\alpha = 0$ τότε $|\alpha| = 0$

Με λόγια : Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού α είναι ο εαυτός του
 Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού α είναι ο μείον εαυτός του
 Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι μηδέν

3.

Αντίστροφος του α : Αν $\alpha \neq 0$ τότε ο αριθμός $\frac{1}{\alpha}$ ονομάζεται αντίστροφος του α .

Και βέβαια, αντίστροφος του $\frac{1}{\alpha}$ είναι ο α

4.

Αφαίρεση : $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ Δηλαδή
Προσθέτω στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου

5.

Διαίρεση : $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ Δηλαδή

Πολλαπλασιάζω τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη

6.

Γινόμενο = 0 : Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Που σημαίνει ότι μπορεί μόνο το α να είναι 0 ή
μόνο το β να είναι 0 ή
και τα δύο να είναι 0

Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι ένα τουλάχιστον από
τα α, β είναι 0

7.

Πολλαπλασιασμός επί 0 : Δίνει μηδέν $\alpha \cdot 0 = 0$

8.

Διαίρεση δια 0 : Ποτέ, απαγορεύεται $\frac{\alpha}{0}$

9.

Διαίρεση του 0 δια $\alpha \neq 0$: Δίνει μηδέν $\frac{0}{\alpha} = 0$

10.

Διαίρεση του 0 δια 0 : Ποτέ, απαγορεύεται $\frac{0}{0}$ (για την ώρα)

11.**Απαλοιφή παρενθέσεων**

- Αν μία παρένθεση έχει μπροστά της το $+$, παραλείπω την παρένθεση χωρίς καμία άλλη μεταβολή.
- Αν όμως η παρένθεση έχει μπροστά της το $-$, παραλείπω την παρένθεση και αλλάζω τα πρόσημα όλων των όρων που είναι μέσα στην παρένθεση.

12.**Αριθμητική παράσταση**

Λέγεται η παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών

13.**Αλγεβρική παράσταση**

Λέγεται η παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών

14.**Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης :**

Φέρνουμε την αλγεβρική παράσταση στην τελική της μορφή και μετά κάνουμε αντικατάσταση των μεταβλητών με αριθμούς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) 2(-3+5) - 4\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) + 6 \quad \beta) -(-2+5) - \{-8 + [3 - (2-8+3)]\}$$

$$\gamma) 20 : (-5) + 4(-5+3) + \frac{1}{3} \quad \delta) \frac{3 - (-6+8) + 4(12-16) + 7}{3(8-12) - 4(9-6) + 2}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} 2(-3+5) - 4\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) + 6 &= 2 \cdot 2 - \frac{4}{4} + \frac{12}{2} + 6 = \\ &= 4 - 1 + 6 + 6 = \\ &= 15 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} -(-2+5) - \{-8 + [3 - (2-8+3)]\} &= 2 - 5 - \{-8 + [3 - 2 + 8 - 3]\} = \\ &= 2 - 5 - \{-8 + 3 - 2 + 8 - 3\} = \\ &= 2 - 5 + 8 - 3 + 2 - 8 + 3 = \\ &= -1 \end{aligned}$$

Σχόλιο 11

γ)

$$\begin{aligned} 20 : (-5) + 4 \cdot (-5+3) + \frac{1}{3} &= -4 + 4(-2) + \frac{1}{3} = \\ &= -4 - 8 + \frac{1}{3} = \\ &= -12 + \frac{1}{3} = \\ &= -\frac{36}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{35}{3} \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} \frac{3 - (-6+8) + 4(12-16) + 7}{3(8-12) - 4(9-6) + 2} &= \frac{3 - 2 + 4(-4) + 7}{3(-4) - 4 \cdot 3 + 2} = \\ &= \frac{3 - 2 - 16 + 7}{-12 - 12 + 2} = \frac{-8}{-22} = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

2.

Αν $A = -7 - (-5 - x - \beta) - (\alpha + y + 2)$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης όταν $x - \alpha = -4$ και $y - \beta = 12$

Σχόλια 11, 14

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} A &= -7 - (-5 - x - \beta) - (\alpha + y + 2) = -7 + 5 + x + \beta - \alpha - y - 2 \\ &= -4 + (x - \alpha) - (y - \beta) \end{aligned}$$

$$\text{Για } x - \alpha = -4 \text{ και } y - \beta = 12 \text{ είναι } A = -4 + (-4) - 12 = -4 - 4 - 12 = -20$$

3.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) \left[\left(\frac{1}{5} + 2 \right) - 1 \right] - \left(2 - \frac{1}{3} \right) - [- (-2)]$$

$$\beta) \left(\frac{6}{5} - 2 + \frac{5}{3} \right) : \left(2 - \frac{2}{5} \right)$$

$$\gamma) \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) + \left(+\frac{1}{7} \right) : \frac{6}{7} - (-4) : \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right)$$

$$\delta) -3 - \left[-3 + \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot \left(-\frac{5}{4} \right) + 4 \right] \cdot \left(-\frac{16}{5} \right)$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{5} + 2 \right) - 1 \right] - \left(2 - \frac{1}{3} \right) - [- (-2)] &= \left[\frac{1}{5} + 2 - 1 \right] - 2 + \frac{1}{3} - 2 = \\ &= \frac{1}{5} + 2 - 1 - 2 + \frac{1}{3} - 2 = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 3 = \\ &= \frac{3}{15} + \frac{5}{15} - \frac{45}{15} = -\frac{37}{15} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5} - 2 + \frac{5}{3} \right) : \left(2 - \frac{2}{5} \right) &= \left(\frac{18}{15} - \frac{30}{15} + \frac{25}{15} \right) : \left(\frac{10}{5} - \frac{2}{5} \right) = \\ &= \frac{13}{15} : \frac{8}{5} = \\ &= \frac{13}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{13}{24} \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) + \left(+\frac{1}{7} \right) : \frac{6}{7} - (-4) : \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) &= \frac{5}{6} + \left(+\frac{1}{7} \right) \cdot \frac{7}{6} - (-4) : \left(-\frac{4}{4} \right) = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} - (-4) : (-1) = \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} -3 - \left[-3 + \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot \left(-\frac{5}{4} \right) + 4 \right] \cdot \left(-\frac{16}{5} \right) &= -3 - \left[-3 + \frac{15}{8} + 4 \right] \cdot \left(-\frac{16}{5} \right) = \\ &= -3 - \left[\frac{15}{8} + 1 \right] \cdot \left(-\frac{16}{5} \right) = \\ &= -3 - \frac{23}{8} \cdot \left(-\frac{16}{5} \right) = -3 + \frac{46}{5} = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

4.

Αν $x = |-3-7|$ και $y = -\left|-1-\frac{1}{2}\right|$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = -y - \{-x + y + [-x - (x+y)]\}$$

Προτεινόμενη λύση

$$x = |-3-7| = |-10| = 10 \quad \text{και} \quad y = -\left|-1-\frac{1}{2}\right| = -\left|-\frac{3}{2}\right| = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} A &= -y - \{-x + y + [-x - (x+y)]\} = -y - \{-x + y + [-x - x - y]\} = \\ &= -y - \{-x + y - x - x - y\} = \\ &= -y + x - y + x + x + y = \\ &= 3x - y \end{aligned}$$

$$\text{Για } x = 10 \text{ και } y = -\frac{3}{2} \text{ είναι } A = 3 \cdot 10 + \frac{3}{2} = 30 + \frac{3}{2} = \frac{63}{2}$$

5.

Αν $y + \omega - x = -6$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 3 - \{\omega - (y + 6) + (3x - 2) - (-5 + y) + [1 - (3\omega + x - 4)]\}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} A &= 3 - \{\omega - (y + 6) + (3x - 2) - (-5 + y) + [1 - (3\omega + x - 4)]\} = \\ &= 3 - \{\omega - y - 6 + 3x - 2 + 5 - y + [1 - 3\omega - x + 4]\} = \\ &= 3 - \{\omega - y - 6 + 3x - 2 + 5 - y + 1 - 3\omega - x + 4\} = \\ &= 3 - \omega + y + 6 - 3x + 2 - 5 + y - 1 + 3\omega + x - 4 = \\ &= 1 + 2\omega + 2y - 2x = \\ &= 1 + 2(\omega + y - x) \end{aligned}$$

$$\text{Για } y + \omega - x = -6 \text{ είναι } A = 1 + 2(-6) = 1 - 12 = -11$$

6.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) \frac{\left(2 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{8}\right)}{\left(3 - \frac{2}{6}\right) : \left(3 - \frac{4}{5} + \frac{2}{10}\right)}$$

$$\beta) \frac{\left(-\frac{5}{2} + 5 - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)}{\left(-\frac{4}{7}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right)}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} \frac{\left(2 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{8}\right)}{\left(3 - \frac{2}{6}\right) : \left(3 - \frac{4}{5} + \frac{2}{10}\right)} &= \frac{\left(\frac{6}{3} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{12}{8} + \frac{10}{8} - \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{18}{6} - \frac{2}{6}\right) : \left(\frac{30}{10} - \frac{8}{10} + \frac{2}{10}\right)} = \\ &= \frac{\frac{5}{3} : \frac{21}{8}}{\frac{16}{6} : \frac{24}{10}} = \frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{8}{21}}{\frac{16}{6} \cdot \frac{24}{10}} = \frac{\frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 21}}{\frac{16 \cdot 24}{6 \cdot 10}} = \\ &= \frac{5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 24}{3 \cdot 21 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} \frac{\left(-\frac{5}{2} + 5 - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)}{\left(-\frac{4}{7}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right)} &= \frac{\left(-\frac{10}{4} + \frac{20}{4} - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{9}{6} + \frac{1}{6}\right)}{\left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right)} = \\ &= \frac{\frac{7 \cdot 10}{4} \cdot \frac{7 \cdot 10}{6}}{\frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 5}} = \frac{\frac{4 \cdot 6}{4 \cdot 7}}{\frac{4 \cdot 6}{4 \cdot 7}} = \\ &= \frac{7 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{175}{48} \end{aligned}$$

7.

$$\text{Αν } x = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right), \quad y = -3 + 2 - x - \frac{1}{2} + 1 \quad \text{και} \quad z + \omega = x + 2 - y,$$

$$\text{να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης } A = \frac{1}{2} + z - 3 + \omega - x + y$$

Προτεινόμενη λύση

$$x = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = -\frac{7}{12}$$

$$y = -3 + 2 - x - \frac{1}{2} + 1 = -x - \frac{1}{2} = \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$$

$$z + \omega = x + 2 - y = -\frac{7}{12} + 2 - \frac{1}{12} = -\frac{8}{12} + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } A &= \frac{1}{2} - 3 + (z + \omega) - x + y = \frac{1}{2} - 3 + \frac{4}{3} + \frac{7}{12} + \frac{1}{12} = \\ &= \frac{6}{12} - \frac{36}{12} + \frac{16}{12} + \frac{7}{12} + \frac{1}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

8.

$$\text{Αν } x = -2, \quad y = |-3| + |2 - 4|, \quad z = |-1| + 2, \quad \text{να υπολογίσετε την τιμή της}$$

$$\text{παράστασης } A = -[-x + 2 - (-y + x)] - (-x - z)$$

Προτεινόμενη λύση

$$y = |-3| + |2 - 4| = 3 + |-2| = 3 + 2 = 5$$

$$z = |-1| + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} A &= -[-x + 2 - (-y + x)] - (-x - z) = -[-x + 2 + y - x] + x + z = \\ &= x - 2 - y + x + x + z = \\ &= 3x + z - y - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Για } x = -2, \quad y = 5 \quad \text{και} \quad z = 3 \quad \text{είναι} \quad A = -6 + 3 - 5 - 2 = -10$$

9.

Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων

$$\alpha) A = 2(\alpha - 3\beta) + 3(\alpha + 3\beta) \quad \text{όταν } \alpha = 0,02 \quad \text{και } \beta = 2005$$

$$\beta) B = 3(x + 2y) + 2(3x + y) + y \quad \text{όταν } x + y = \frac{1}{9}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$A = 2(\alpha - 3\beta) + 3(\alpha + 3\beta) = 2\alpha - 6\beta + 3\alpha + 9\beta = 5\alpha + 3\beta$$

$$\begin{aligned} \text{Για } \alpha = 0,02 \quad \text{και } \beta = 2005 \quad \text{έχουμε} \quad A &= 5 \cdot 0,02 + 3 \cdot 2005 = \\ &= 0,1 + 6015 = \\ &= 6015,1 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} B &= 3(x + 2y) + 2(3x + y) + y = 3x + 6y + 6x + 2y + y = \\ &= 9x + 9y = 9(x + y) \end{aligned}$$

$$\text{Για } x + y = \frac{1}{9} \quad \text{έχουμε} \quad B = 9 \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

10.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = 2(3x + 2y - \omega) - 4(x + 3 - y) + 8\omega + 5$,
αν $x - \omega = 4$ και $y + \omega = 3$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} A &= 2(3x + 2y - \omega) - 4(x + 3 - y) + 8\omega + 5 = 6x + 4y - 2\omega - 4x - 12 + 4y + 8\omega + 5 \\ &= 2x + 8y + 6\omega + 5 \\ &= 2x + 8y + 8\omega - 2\omega + 5 = \\ &= (2x - 2\omega) + (8y + 8\omega) + 5 = \\ &= 2(x - \omega) + 8(y + \omega) + 5 = \\ &= 2 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 5 = 8 + 24 + 5 = 37 \end{aligned}$$